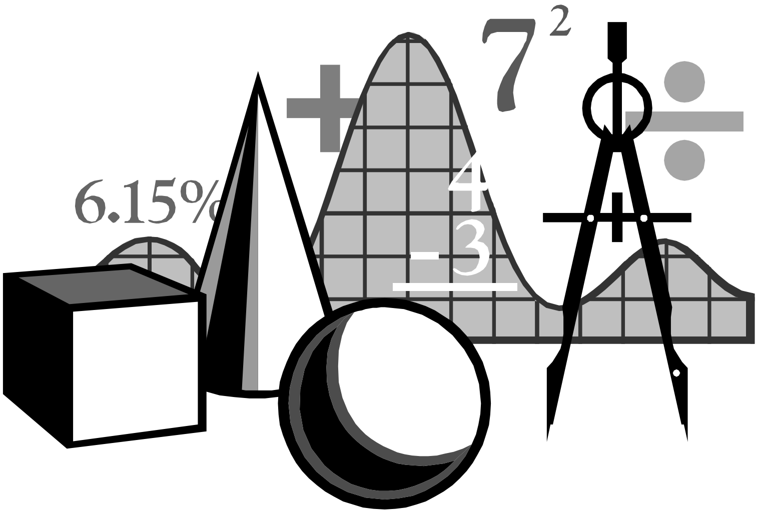
Mathematatische Grundlagen

Eine Handreichung
zum Auffrischen mathematischer Grundkenntnisse für das Fach

Berücksichtigung naturwissenschaftlicher und technischer Gesetzmässigkeiten

Industriemeister NEU



Die nachfolgenden Seiten dienen dem Selbststudium – sehr empfohlen im Hinblick auf die Anforderungen des Lehrplanes, Kapitels

5.3 Berechnen betriebs- und fertigungstechnischer Größen bei Belastungen und Bewegungen

Die Aufgaben sind als Training zu verstehen, um die mathematischen Grundlagen beim Formelumstellen, beim Berechnen, beim Lösen betriebs- und fertigungstechnischer Aufgabenstellungen handhaben zu können.

Bernd Paul, St. Ingbert, im Herbst 1999

1 Zahlenarten

Zahlen werden durch Zeichen, arabische Ziffern, dargestellt: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Die Zahlen, die man zum Zählen gebraucht, nennt man

Natürliche Zahlen Ü

Alle positiven ganzen Zahlen sind natürliche Zahlen: 0, 1, 2, 3, ... 745, ...

Nimmt man die negativen Zahlen hinzu, so erhält man die

Ganzen Zahlen â

........–783, ...–2, –1, 0, 1, 2, ...

Fasst man die ganzen Zahlen, die negativen und positiven Brüche zusammen, so erhält man die

Rationalen Zahlen á

D. h. jede „**rationale Zahl**“ ist eine Zahl, die sich in der Form $\frac{a}{b}$ darstellen lässt ($b \neq 0$, a, b Elemente der ganzen Zahlen). Sie lässt sich als abbrechender oder als periodischer Dezimalbruch darstellen.

Abbrechender Dezimalbruch: $\frac{3}{4} = 0{,}75$ Periodischer Dezimalbruch: $\frac{2}{7} = 0{,}\overline{285714}$

Bei den Brüchen wird unterschieden:

Scheinbruch	z. B.	$\frac{6}{3} = 2$	
echter Bruch	z. B.	$\frac{3}{5}$	Zähler < Nenner
unechter Bruch	z. B.	$\frac{5}{4}$ oder $\frac{5}{5}$	Zähler ≥ Nenner
Stammbruch	z. B.	$\frac{1}{5}$	Zähler = 1

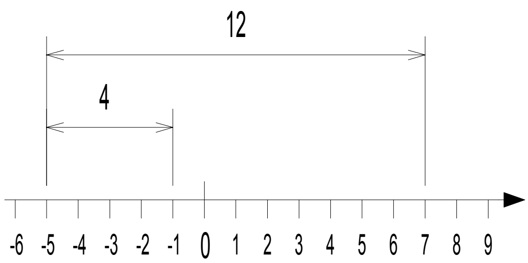
Nimmt man zu den **rationalen Zahlen** die **irrationalen Zahlen** hinzu, erhält man die

Reellen Zahlen à

Es gibt keine rationale Zahl, die der Gleichung $x^2 = 2$ genügt. D. h., die Zahl $\sqrt{2}$ lässt sich nicht als Bruch darstellen.

Die **reellen Zahlen** lassen sich erklären als die Lücken zwischen den rationalen Zahlen.

Die **rationalen Zahlen** lassen sich am Zahlenstrahl darstellen:



2 Addition und Subtraktion

Die Addition ordnet jedem Paar rationaler Zahlen genau eine Zahl zu.

Summanden
↓ ↓
a + b = c
↑
Summe

Mehrere Summanden bilden eine **Summe**.
(Algebraische Summe)

Zahlzeichen, Variable sowie alle sinnvollen Verbindungen von Zahlzeichen und Variablen mit Rechenzeichen nennt man Terme.

$a + a + a = 3 \text{ mal } a$

$3 \text{ mal } a = 3 \cdot a = 3a$ — An dieser Stelle kann das Malzeichen entfallen.

$3\frac{3}{4} = 3 + \frac{3}{4} \Rightarrow 3\frac{3}{4} \neq 3 \cdot \frac{3}{4}$ — Bei gemischten Zahlen darf kein Malzeichen stehen.

Variable
↓
3a
↑
Beizahl, Vorzahl
Koeffizient

$1a = a,\ 1x = x$ — Die Beizahl 1 kann weggelassen werden.

$a + b = b + a$ — In einer Summe darf man die Summanden vertauschen.

Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz)

$(a + b) + c = a + (b + c)$
$(3 + 7) + 2 = 3 + (7 + 2)$

Beim Addieren darf man die Summanden zu Teilsummen zusammenfassen.

Assoziativgesetz (Klammergesetz)

$4x + 3x = (4 + 3)x = 7x$ — Gleichartige Zahlen werden addiert, indem man die Beizahlen addiert.

$2a + 3a + 5b + 2x = 5a + 5b + 2x$ — In einer Summe lassen sich nur gleichartige Summanden addieren.

Die Subtraktion ist die Umkehrung der Addition.

Minuend
Subtrahend
$a - b = d$
Differenz

Das Ergebnis einer Subtraktion, heißt **Differenz**.

$5a - 3a = 2a$

Man subtrahiert bei gleichartigen Zahlen die Beizahlen voneinander.

$6a - 2a - 3x = 4a - 3x$

Nur gleichartige Zahlen lassen sich voneinander subtrahieren.

$5 - 3 \neq 3 - 5$

Die Subtraktion ist nicht kommutativ.

$(16 - 5) - 3 \neq 16 - (5 - 3)$

Die Subtraktion ist nicht assoziativ.

Klammerregeln

$a + (b + c - x) = a + b + c - x$

$a + (-b + c - x) = a - b + c - x$

Steht ein Pluszeichen vor der Klammer, so kann man diese weglassen.

$a - (b + c - x) = a - b - c + x$

$a - (-b + c - x) = a + b - c + x$

Ein Minuszeichen vor der Klammer verändert alle Rechenzeichen in der Klammer.

$a - \{b + [c - (d + e)]\} =$
$a - \{b + [c - d - e]\} =$
$a - \{b + c - d - e\} =$
$a - b - c + d + e$

Bei geschachtelten Klammern - immer stets von innen nach außen auflösen.

Nach jedem Gleichheitszeichen empfiehlt es sich, mit einer neuen Zeile zu beginnen.
Die Übersicht wird dadurch wesentlich größer.

Übungen:

Beispiel

$9a - 4c - \{[3a - 4c + 5a] - 3b\} =$

$9a - 4c - \{8a - 4c - 3b\} =$

$9a - 4c - 8a + 4c - 5a =$

$a + 3b$

1.) $7y - (3x + 4y) =$

2.) $3{,}5a - 7b + 5c + 3{,}5a - 1{,}25b - 7{,}25c - 5{,}33a - 4{,}25b =$

3.) $7{,}3a - 3{,}05b + 1{,}49b + 6{,}8c - 9{,}42c + 18{,}9a + 1{,}56b =$

4.) $1{,}8x + 3{,}7y - 2{,}04z + 3{,}45x - 1{,}09y - 2{,}03x + 4{,}89z =$

5.) $35x - (15y - 25x) =$

6.) $5a - 9b + (6a - 10b) + (7a - 11b) =$

7.) $57x - (28y + 39x + 47z) - (9x - 18y - 58z) =$

Lösungen zu: Summenterme

1.) $3y - 3x$

2.) $1{,}67a - 12{,}5b - 2{,}25c$

3.) $26{,}2a - 2{,}62c$

4.) $3{,}22x + 2{,}61y + 2{,}85z$

5.) $60x - 15y$

6.) $18a - 30b$

7.) $9x - 10y + 11z$

3 Multiplikation und Division

Die Multiplikation ist eine Zuordnung, die jedem Paar rationaler Zahlen genau eine Zahl zuordnet. Das Ergebnis einer Multiplikation heißt Produkt.

Summanden *Faktoren*

$a + a + a + a = 4a$

Produkt

Aus einer wiederholten Addition des gleichen Summanden wird als kürzere Schreibweise die **Multiplikation** eingeführt.

$4 \cdot a = 4a$, $a \cdot b = ab$

$a \cdot b \cdot c = c \cdot a \cdot b = bca$

Zwischen Faktoren (nicht aber zwischen Ziffern) kann
man kann die Faktoren vertauschen.

Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz)

$6 \cdot 0 = 0$
$0 \cdot 5 \cdot b \cdot c \cdot x = 0$

Ist einer der Faktoren Null, so ist das ganze Produkt Null.

$4a \cdot 5b \cdot 3 = 4 \cdot 5 \cdot 3ab = 60ab$

Teilprodukte können zusammengefasst werden:

$a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Assoziativgesetz (Klammergesetz)

$a \cdot b = ab$

$(-a) \cdot (-b) = ab$

$(-a) \cdot b = -ab$

$a \cdot (-b) = -ab$

$+ \cdot + = +$
$- \cdot + = -$
$+ \cdot - = -$
$- \cdot - = +$

Gleiche Vorzeichen ergeben stets +,

Ungleiche Vorzeichen ergeben stets −!

$3(a + b) =$
$(a + b) + (a + b) + (a + b) =$
$a + b + a + b + a + b = 3a + 3b$

Man multipliziert jedes Glied einer Summe mit dem Faktor.

$n(3 + x) = n \cdot 3 + n \cdot x = 3n + nx$

Distributivgesetz (Verteilungsgesetz)

$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$

Erweitertes Distributivgesetz

Regeln

Klammern werden zuerst berechnet.

Punktrechnung geht vor Strichrechnung.

Die Division ist die Umkehrung der Multiplikation.

Definition: Sei a Vielfaches von b.
Die Zahl, die mit b multipliziert a ergibt, heißt Quotient von a und b
Das Ergebnis einer Division heißt Quotient.

Divident
Divisor

$$\frac{a}{b} = a : b = c$$

Quotient

Doppelpunkt und Bruchstrich sind gleichbedeutende Rechenzeichen.

Beim Doppelpunkt empfiehlt sich das Setzen von Klammern.

Wie oft kann man von
4a a subtrahieren?

$4a - a - a - a - a$

4 mal

$$\frac{a}{b} \neq \frac{b}{a}$$

Die **Division** kann als wiederholte Subtraktion des Divisors vom Dividenden aufgefasst werden.

Dividend (Zähler) und Divisor (Nenner) dürfen nicht vertauscht werden.

Die Division ist nicht kommutativ und nicht assoziativ.

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}$$

$$\frac{+}{+} = +$$

$$\frac{-}{-} = +$$

$$\frac{-}{+} = -$$

$$\frac{+}{-} = -$$

Gleiche Vorzeichen ergeben stets +,
ungleiche Vorzeichen ergeben stets −!

Regeln

$$\frac{3ab}{6bc} = \frac{3 \cdot a \cdot b}{6 \cdot b \cdot c} = \frac{a}{2c}$$

Beim Kürzen werden Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl geteilt.

$$\frac{ab + ac}{a} = \frac{a(b + c)}{a} = \frac{b + c}{1} = b + c$$

Bei Summen oder Differenzen den Zähler zunächst faktorisieren und dann erst kürzen.

$$\frac{a}{b} \left| \frac{c}{c} \right. \text{(mit c erweitern)} \Rightarrow \frac{ac}{bc}$$

Beim Erweitern werden Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert.
Der Wert des Bruches, der Quotient ändert sich nicht.

$$\frac{a}{b} \cdot x = \frac{ax}{b}$$

Ein Bruch wird mit einer Zahl multipliziert, indem man den Zähler des Bruches mit der Zahl multipliziert.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Brüche werden multipliziert, indem man Zähler und Nenner miteinander multipliziert.

$$\frac{a}{b} : x = \frac{a}{bx}$$

Ein Bruch wird durch eine Zahl dividiert, indem man den Nenner des Bruches mit der Zahl multipliziert.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Brüche werden dividiert, indem man den ersten Bruch mit dem Kehrwert des zweiten Bruches multipliziert.

$$\frac{a + b + c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d}$$

Man dividiert jeden Summanden durch den Nenner.

$$\frac{0}{b} = 0 \qquad \frac{a \times 0}{b} = 0$$

Hat einer der Dividenden den Wert Null, so ist auch der Wert des Bruches Null.

$$\frac{1}{0{,}1} = 10$$

Was ergäbe sich aber bei $\frac{1}{0}$?

$$\frac{1}{0{,}001} = 1000$$

$$\frac{1}{0{,}000001} = 1000000$$

Wird der Divisor immer kleiner,
so wird der Quotient immer größer,
$\Rightarrow$
er geht gegen unendlich.

Durch Null darf nicht dividiert werden!

Faktorisieren

$3a + 3b + 3x = 3(a + b + x)$
$2x - 4b + 16y = 2(x - 2b + 8y)$

Einen gemeinsamen Faktor kann man ausklammern: **faktorisieren**

Übungen zur Multiplikation

1.) $4a^2 - 2a(3a + b) - 3b^2 + 3b(a - b) =$

2.) $3(a + b - 2y)x - 2y(a - 3b - 3x) - 3(x + 2y)b + 2ay =$

3.) $3{,}6x(2{,}8a - 3{,}3b) - 2{,}9a(5{,}1x - 6{,}6b) + 8{,}1b(0{,}4a + 1{,}1x) =$

4.) $1{,}04x - 0{,}25(4x + 8y) - 16x(1{,}25x + 0{,}25y) + 5y(x + 1) + 19x^2 =$

5.) $0{,}03x(4{,}5y + 100z) - 0{,}4z(5x - 6y) + 6y(0{,}75x - 0{,}4z) =$

6.) $15a^2 - 0{,}3a(50a - 0{,}1b) + 0{,}25b(7b - 0{,}04a) - 0{,}8b(0{,}025a + 0{,}125b) =$

7.) $12a(3b - 4c + 2a) - 10b(a - 2b - 5c) + 5c(3a - 4b) =$

8.) $x[3a - 7(5b + 3c)] - a(3x - 6b) + b(35x - 6a) =$

9.) $16a[(29a - b) + 2(8b - 14a) + 7c] - 4a(28c + 64b) =$

10.) $(m - n)(x + y) =$

11.) $(a - 5m)(a + 3n) =$

12.) $(5x + 1)(7y - 2) =$

Rechnen mit Einheiten

Einheiten werden grundsätzlich in allen Rechnungsgängen innerhalb des Lösungsweges mitgeschrieben!

13.) $3\ \mathrm{Nm} - (5\ \mathrm{Nm} + 0{,}004\ \mathrm{kNm}) =$

14.) $7\ \mathrm{N} + 15\ \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} - 12(0{,}4\ \mathrm{N} + 400\ \mathrm{mN} - 1000000\ \mu\mathrm{N}) =$

Lösungen zur Multiplikation

1.) $-2a^2 + ab - 6b^2$
2.) $3ax$
3.) $22{,}38ab - 4{,}71ax - 2{,}97bx$
4.) $-x^2 + 0{,}04x + xy + 3y$
5.) $4{,}635xy + xz$
6.) $1{,}65b^2$
7.) $24a^2 + 26ab - 33ac + 30bc + 20b^2$
8.) $-21cx$
9.) $16a^2 - 16ab$
10.) $mx + my - nx - ny$
11.) $a^2 - 5am + 3an - 15mn$
12.) $-10x + 35xy + 7y - 2$

13.) $3\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m} - 5\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m} - 0{,}004 \cdot 1000\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m} =$ | ⇐ *hier ist die Zeile sehr ausführlich!*

$3\ \mathrm{Nm} - 5\ \mathrm{Nm} - 4\ \mathrm{Nm} =$ *geschrieben*

$-6\ \mathrm{Nm}$

Beispiel

14.) $30{,}4\ \mathrm{N}$

Übungen zur Division: Bruchrechnung

1.) $\dfrac{5x+7}{30ab}+\dfrac{2-9x}{15bc}+\dfrac{6x-15}{12ac}=$

2.) $\dfrac{8(a-5)}{15}+\dfrac{2(a+4)}{3}-\dfrac{3(5a-1)}{4}=$

3.) $\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}=$

Lösungen zur Division: Bruchrechnung

1.) $\dfrac{8a-36ax-75b+30bx+14c+10cx}{60abc}$

2.) $\dfrac{3(5-17a)}{20}$

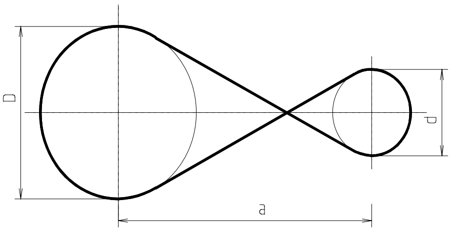
3.) $\dfrac{R_2\cdot R_3+R_1\cdot R_3+R_1\cdot R_2}{R_1\cdot R_2\cdot R_3}$

Übungen zum Faktorisieren

- Das Faktorisieren – das Ausklammern hat eine große Bedeutung beim Formelrechnen, beim Vereinfachen von Formeln usw.
- Beim Faktorisieren werden Faktoren ausgeklammert, die in allen Summanden enthalten sind.

Die Berechnung der Länge L eines gekreuzten Treibriemens ergibt:

$$L=\frac{\pi}{2}(D+d)+2a\cdot\cos\alpha+\frac{\pi\cdot\alpha}{180°}(D+d)$$



Hier kann man noch ausklammern; ob dies immer sinnvoll ist, muss der Rechengang zeigen.

$$L=\frac{\pi}{2}(D+d)+2a\cdot\cos\alpha+\frac{\pi\cdot\alpha}{180°}(D+d)$$

$$L=\frac{\pi}{2}(D+d)\left(1+\frac{\alpha}{90°}\right)+2a\cdot\cos\alpha$$

Beispiel

1.) $15abx-9b^2y+12bt=$

2.) $63xy+84y^2+98yz=$

3.) $20ax-35bx+40x^2=$

4.) $2{,}4m-3{,}6mn+14{,}4m^2n^2=$

5.) $M=2ah+2bh$

6.) $A=R^2\pi-r^2\pi$

7.) $M=D\pi h+d\pi h$

8.) $Q=m\cdot c\cdot T_2-m\cdot c\cdot T_1$

9.) $\dfrac{Fc^3}{3EJ}+\dfrac{Flc^2}{2EJ}=$

10.) $b(a-b)\cdot\dfrac{R}{s}+\dfrac{s}{2R}(a-b)^2\cdot\dfrac{R^2}{s^2}=$

11.) $O=\dfrac{D^2\pi}{2}-\dfrac{d^2\pi}{2}+D\pi h+d\pi h$

12.) $\dfrac{Q\cdot H}{4500}+\dfrac{Q\cdot h}{180\cdot 25}=$

Lösungen zum Faktorisieren

1.) $3b(5ax - 3by + 4t)$
2.) $7y(9x + 12y + 14z)$
3.) $5x(4a - 7b + 8x)$
4.) $1{,}2m(2 - 3n + 12mn^2)$
5.) $M = 2h(a + b)$
6.) $A = \pi (R^2 - r^2)$
7.) $M = \pi \cdot h \cdot (D + d)$
8.) $Q = m \cdot c \cdot (T_2 - T_1)$
9.) $\frac{Fc^2}{6EJ}(2c + 3l)$
10.) $\frac{(a-b)R}{2s}(a + b)$
11.) $O = \frac{\pi}{2}\left[(D + d)(D - d + 2h)\right]$
12.) $\frac{Q}{4500}(H + h)$

4 Gleichungen

Eine Gleichung ist die Verbindung zweier betragsmäßig gleichwertiger Größen oder Terme durch das Gleichheitszeichen.

Man unterscheidet:

1. Die Erklärungsgleichung

   $1\,m^3 = 1000\,dm^3$

   $1\,km = 1000\,m$

2. Die Formelgleichung

   $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

   $A = \frac{(g \cdot h)}{2}$

3. Die Bestimmungsgleichung

   $x + 13 = 25$

   $2(x - 4) = 12$

4. Die Funktionsgleichung

   $y = mx + b$

Beispiele für Bestimmungsgleichungen mit einer bzw. mehreren Variablen:

$5x = 35$	eine Variable	$2x + 5y - 4z = 55$	drei Variable
$2y = x^2$	zwei Variable		usw.

$4x + 3 = -6$	lineare Gleichung	Gleichung 1. Grades
$x^2 - 3x + 2 = 0$	quadratische Gleichung	Gleichung 2. Grades
$x^3 + 3x = 27$	kubische Gleichnung	Gleichung 3. Grades
$3 \cdot \sqrt{4x+5} - 10 = 5$	Wurzelgleichung	
$4^{3x-1} = 16$	Exponentialgleichung	
$4\sin(x) = 1$	Trigonometrische Gleichung	

Vorgehen beim Lösen linearer Gleichungen:

1. Schritt(e):	**Wenn Klammern vorhanden sind, ausmultiplizieren und zusammenfassen.**
2. Schritt(e):	**Alle x-Glieder („Unbekannte“) auf die eine Seite bringen, alle bekannten Glieder auf die andere Seite bringen.**
3. Schritt:	**Die Gleichung durch den Faktor dividieren, der bei (x) der Unbekannten steht.**

Wie viele Zeilen, Gleichungen für jeden Schritt hingeschrieben werden. Hängt von der eigenen Rechenfertigkeit ab. Mit einiger Übung können manche Schritte auch zusammengefasst werden.

Üben Sie!

Übungen zu Summen- und Differenzengleichungen

1.) $5x - 16 = 19 - 2x$

2.) $2x - 9 + 8x + 10 = 15 + 5x - 7$

3.) $204 - 3x + 47 + 28x = 25x - 19 + 13x - 29$

4.) $60 - 5x = 120 - 8x - 12$

5.) $10x - (6 + 4x) = 18 + 5x$

6.) $7 - [(9 + 2x) + (6x - 3)] = 2x - 9$

7.) $5R = 2R + 80 - R$

Lösungen zu Summen- und Differenzengleichungen

1.) 5
2.) 1,4
3.) 23
4.) 16
5.) 24
6.) 1
7.) 20

Übungen zu Produkten- und Quotientengleichungen

Beispiel

$$(x+2)(3-x) = 2(x+29) + (5+x)(7-x)$$
Klammern ausmultiplizieren –
$$3x - x^2 + 6 - 2x = 2x + 58 + 35 - 5x + 7x - x^2$$
$$x + 6 - x^2 = 4x + 93 - x^2$$
zusammenfassen –
$$-3x = 87$$
ordnen –
$$x = -29$$
durch den Faktor, der bei der zu bestimmenden Größe steht dividieren.

1.) $15bx - 2a(a - x) = 3b(4x + b) + 5ab$

2.) $(2x - a)(2x - 1) = 2\left[x(2x + a) - a^2\right]$

3.) $150 = 30x - \left[10(x+1) - 6(3x+1) + 15(x-2) + 6(2+x)\right]$

4.) $4(5x + 24) - 3(2x - 15) = 5(3x + 10) + 8(x - 15) + 3(4x - 5) + 37$

Beispiel

$$\frac{x+9}{x-3} = \frac{x+5}{x-5}$$
Die Gleichung mit den Nennern (Hauptnenner) erweitern $\Rightarrow$ Produktengleichung.
$$(x+9)(x-5) = (x-3)(x+5)$$
$$x^2 - 5x + 9x - 45 = x^2 + 5x - 3x - 15$$
$$x^2 + 4x - 45 = x^2 + 2x - 15$$
$$4x - 45 = 2x - 15$$
$$2x = 30$$
$$x = 15$$

5.) $\frac{4x}{5} - \frac{3}{4} = \frac{2x+3}{4} + 6$

6.) $\frac{x+6}{30-x} = \frac{39-x}{x-15}$

7.) $\frac{2x+7}{4x-31} = 3$

Lösungen zu Produkten- und Quotientengleichungen

1.) $(a+b)$
2.) 0,5a
3.) 8
4.) 9
5.) 25
6.) 21
7.) 10

Übungen zu Formelgleichungen – Stellen Sie um nach:

p_{amb}: $\dot{V} = V \cdot n \cdot \frac{p_e + p_{amb}}{t \cdot p_{amb}}$

Beispiel

$\dot{V} = V \cdot n \cdot \frac{p_e + p_{amb}}{t \cdot p_{amb}}$ *Gleichung mit dem Nenner erweitern –*

$\dot{V} \cdot t \cdot p_{amb} = V \cdot n \cdot (p_e + p_{amb})$ *Klammer auflösen –*

$\dot{V} \cdot t \cdot p_{amb} = V \cdot n \cdot p_e + V \cdot n \cdot p_{amb}$

$\dot{V} \cdot t \cdot p_{amb} - V \cdot n \cdot p_{amb} = V \cdot n \cdot p_e$ *ordnen, d.h., die Terme, die die zu bestimmende Größe enthalten, auf eine Seite –*

$p_{amb}\left(\dot{V} \cdot t - V \cdot n\right) = V \cdot n \cdot p_e$ *die zu bestimmende Größe ausklammern –*

$p_{amb} = \frac{V \cdot n \cdot p_e}{\left(\dot{V} \cdot t - V \cdot n\right)}$ *durch den Faktor, der bei der zu bestimmenden Größe steht, dividieren.*

1.) b: $M = \frac{2r \cdot h}{b}\left[(b-r)\varphi + a\right]$

2.) R: $R - 2Q = \frac{R-Q}{Q+1}$

3.) R: $F = \frac{Q(R-r)}{2R}$

4.) r_2: $\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$

5.) d: $\sigma = \frac{p \cdot D \cdot t}{2(t-d) \cdot \delta}$

6.) a: $s = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$

7.) h: $h_s = \sqrt{\frac{(l_1 - l_2)^2}{4} + h^2}$

8.) t_1: $Q = m \cdot c \cdot (T_2 - T_1)$

Lösungen zu Formelgleichungen

1.) $b = \frac{2 \cdot r \cdot h \cdot (a - r \cdot \varphi)}{M - 2 \cdot r \cdot h \cdot \varphi}$

2.) $R = 2Q + 1$

3.) $R = \frac{Q \cdot r}{Q - 2F}$

4.) $r_2 = \frac{r_1 \cdot f \cdot (n-1)}{r_1 - f \cdot (n-1)}$

5.) $d = t - \frac{D \cdot p \cdot t}{2 \cdot \sigma \cdot \delta}$

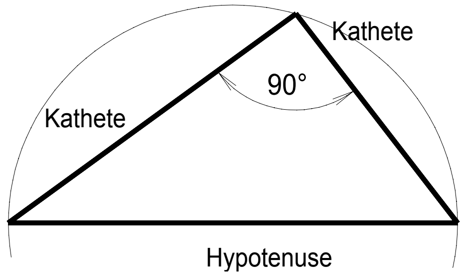
6.) $a = \frac{2(s - v_0 \cdot t)}{t^2}$

7.) $h = \sqrt{{h_s}^2 - \frac{(l_1 - l_2)^2}{4}}$

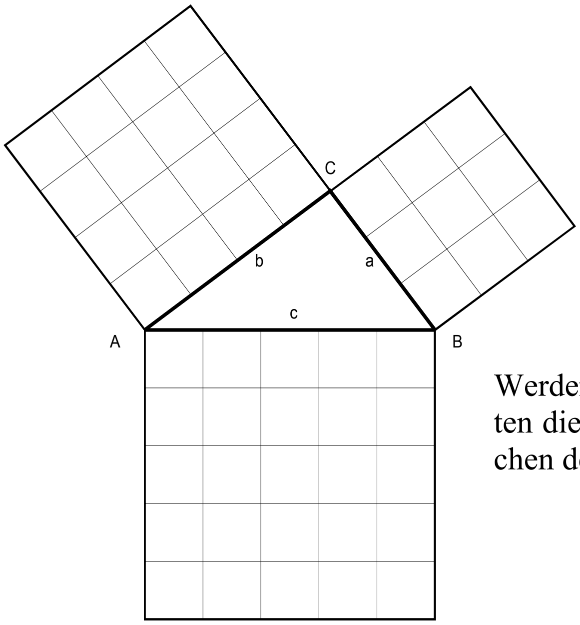
8.) $t_1 = t_2 - \frac{Q}{m \cdot c}$

5 Rechtwinkliges Dreieck

5.1 Lehrsatz des Pythagoras



Im rechtwinkligen Dreieck werden die Seiten, die den rechten Winkel einschließen, als **Katheten** bezeichnet.
Die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite wird **Hypotenuse** genannt.



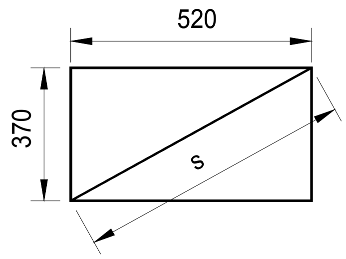
Werden über der Hypotenuse und den beiden Katheten die Quadrate errichtet, so gilt für die Quadratflächen der

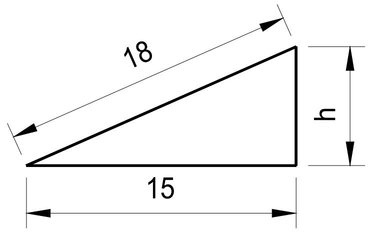
Satz des Pythagoras:

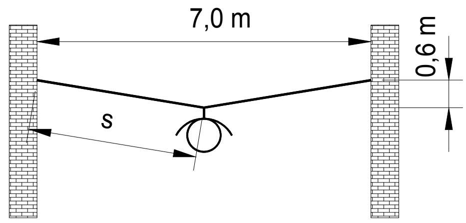
Beim rechtwinkligen Dreieck ist die Fläche des Hypotenusenquadrates so groß, wie die Flächensumme der beiden Kathetenquadrate. ☜

Ist eine "technische Zeichnung" gegeben, so fertigen Sie sich für die Lösung eine Zeichnung an, in der lediglich die für die Lösung wichtigen Größen enthalten sind. Dies hilft Ihnen, aber auch dem Korrektor Ihrer Prüfungsarbeit.

Übungen zum rechtwinkligen Dreieck: Pythagoras





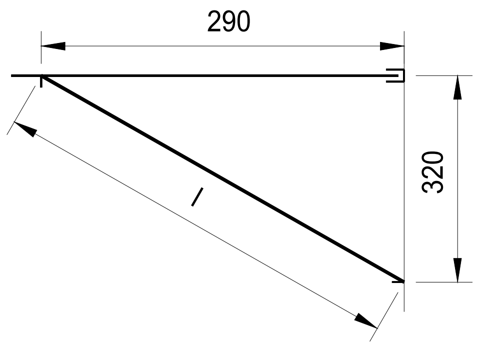


1.) Der rechteckige Rahmen für einen Schaltschrank soll diagonal versteift werden. Bestimmen Sie die Länge der Strebe s!

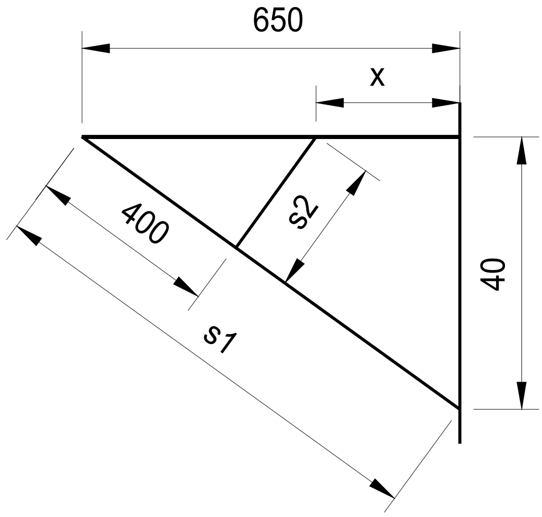
2.) Bestimmen Sie die Höhe h der schiefen Ebene!

3.) Bestimmen Sie die Seillänge s, an der die Lampe hängt!

4.) Bestimmen Sie die Länge l der Strebe des Auslegers!



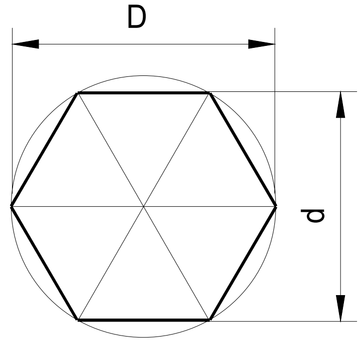
5.) Wie groß sind die Längen s1 und s2 der Streben des Tragrahmens, wenn das Maß x = 145,35 mm sein muss?



6.) Eine 7,5 m lange Leiter wird an eine Hauswand angelehnt. Wie hoch reicht sie hinauf, wenn ihr unteres Ende 1,8 m von der Hauswand entfernt ist?

7.) Ein quaderförmiger Kasten (420 mm × 830 mm × 1920 mm) soll durch eine Raumdiagonale versteift werden. Bestimmen Sie die Länge der Raumdiagonalen!

8.) An dem Spindelkopf der Abziehvorrichtung soll ein Sechskant (D = 48 mm) angearbeitet werden. Bestimmen Sie die größtmögliche Schlüsselweite.

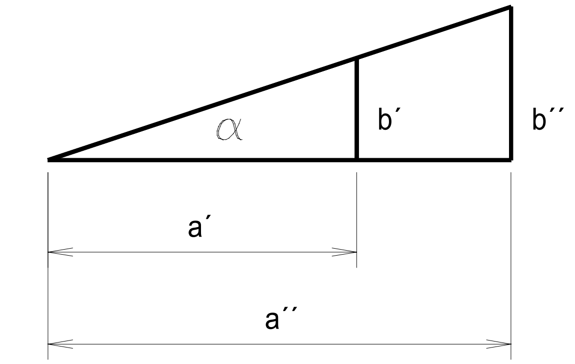


Lösungen zum Pythagoras

1.) 638 mm
2.) 9,95 m
3.) 3,55 m
4.) 432 mm
5.) s1 = 820 mm; s2 = 307,69 mm
6.) d = 41,6 mm (genormt 41 mm)
7.) 7,28 m
8.) 2133,47 mm

5.2 Trigonometrische Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck

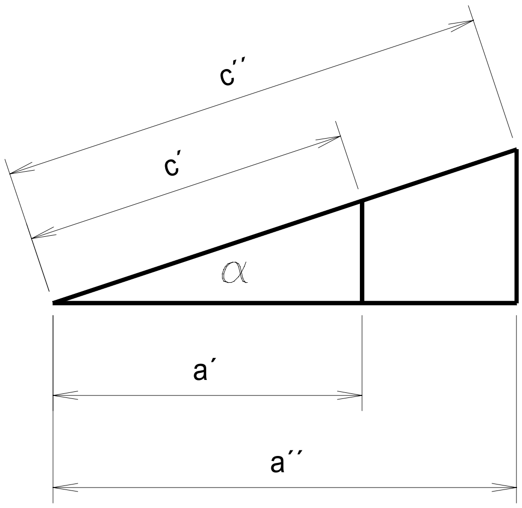
Jedem Winkel α sind die beiden Koordinaten a und b zugeordnet. Diese Koordinaten bilden mit dem Radius ein rechtwinkliges Dreieck. Die Länge der Koordinaten hängt offensichtlich von der Größe des Winkels α ab.
D.h.: Das Verhältnis der Koordinaten – der Seiten zueinander bestimmt den Winkel α.



Der Winkel α ändert sich nicht, wenn sich die Seiten im gleichen Verhältnis ändern:

$$\frac{b'}{a'} = \frac{b''}{a''} = \frac{b'''}{a'''} \; ....$$

Die Koordinaten a und b sind Funktionen des Winkels α.



Auch die Hypotenuse c stellt eine Koordinate dar.
Hier gilt ebenfalls das Verhältnis:

$$\frac{a'}{c'} = \frac{a''}{c''} = \frac{a'''}{c'''} \; ....$$

Die Koordinaten a und c sind Funktionen des Winkels α.

Eine weitere Betrachtung lässt sich formulieren für die Seiten b und c.
Hier gilt ebenfalls das Verhältnis:

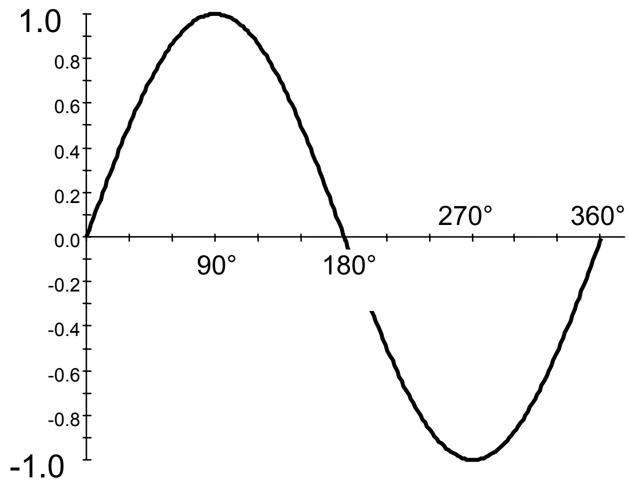
$$\frac{b'}{c'} = \frac{b''}{c''} = \frac{b'''}{c'''} \; ....$$

Die Koordinaten b und c sind Funktionen des Winkels α.

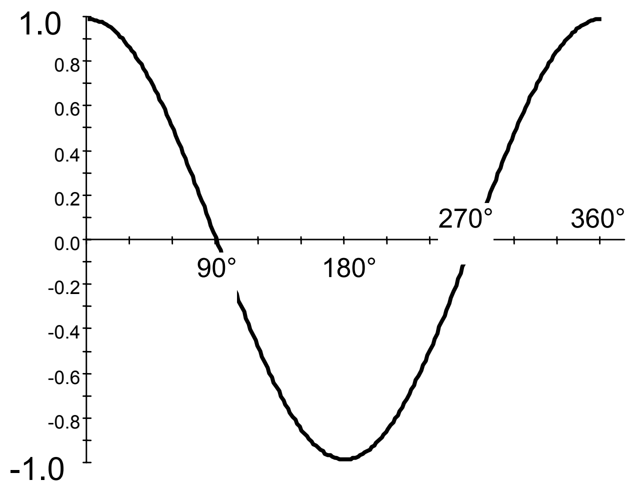
Man definiert nun:

SINUS:	**Verhältnis der Gegenkathete zur Hypotenuse**	$\mathbf{\sin\alpha = \frac{b}{c}}$
COSINUS:	**Verhältnis der Ankathete zur Hypotenuse**	$\mathbf{\cos\alpha = \frac{a}{c}}$
TANGENS:	**Verhältnis der Gegenkathete zur Ankathete**	$\mathbf{\tan\alpha = \frac{b}{a}}$
COTANGENS:	**Verhältnis der Ankathete zur Gegenkathete**	$\mathbf{\cot\alpha = \frac{a}{b}}$

Stellt man diese Verhältnisse in Abhängigkeit zum zugehörigen Winkels dar, ergeben sich folgende Diagramme:

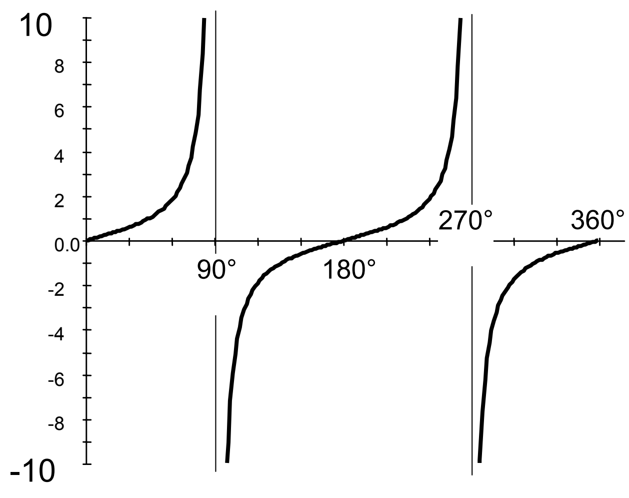


Sinusfunktion



Cosinusfunktion

Die Sinus- bzw. Cosinusfunktion spielt in der Naturwissenschaft eine bedeutende Rolle, z.B. in der Schwingungslehre (Wechselspannung, Pendelbewegung usw.)
Die Cosinusfunktion ist eine um –90° verschobene Sinusfunktion.



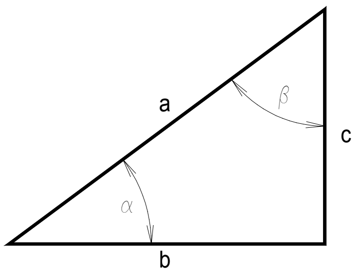
Tangensfunktion

Übungen zum rechtwinkligen Dreieck: Trigonometrie

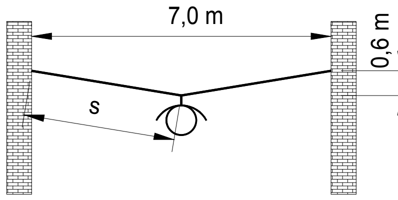
1.) Bestimmen Sie die fehlenden Größen des Dreieckes!

1.1 $\alpha = 28°$, $c = 9\,\text{cm}$

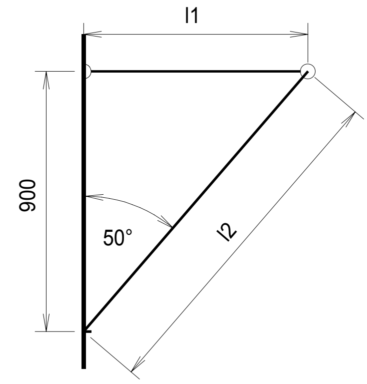
1.2 $\beta = 52°$, $a = 6\,\text{cm}$.



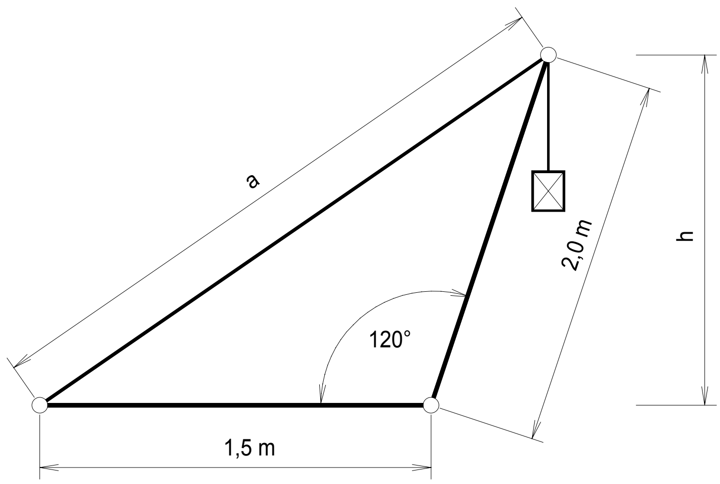
2.) Bestimmen Sie den Winkel, den das Seil mit der Horizontalen bildet!



3.) Bestimmen Sie für den Ausleger die Längen l1 und l2!

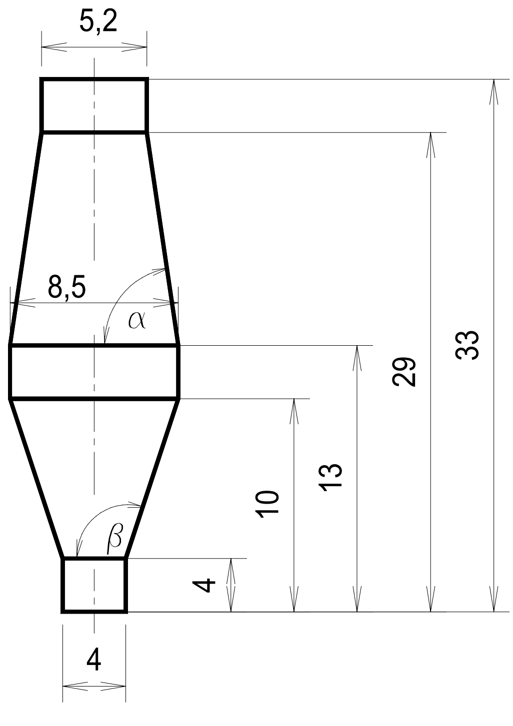


4.) Berechnen Sie von dem Kran die Länge des Auslegers a und die Höhe h!

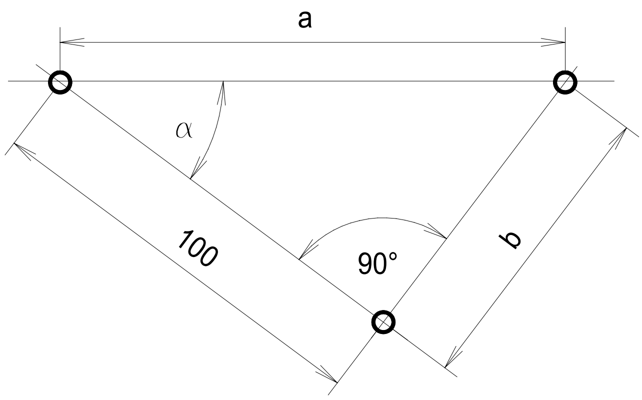


5.) Auf der Dachmitte eines 28 m hohen Hauses steht senkrecht eine Stabantenne. Ein Beobachter steht 67 m von der Vorderseite des 10 m breiten Hauses entfernt. Wie hoch ist die Antenne, wenn er den Höhenwinkel zur Spitze der Antenne mit 30° misst? (Augenhöhe 1,6 m)

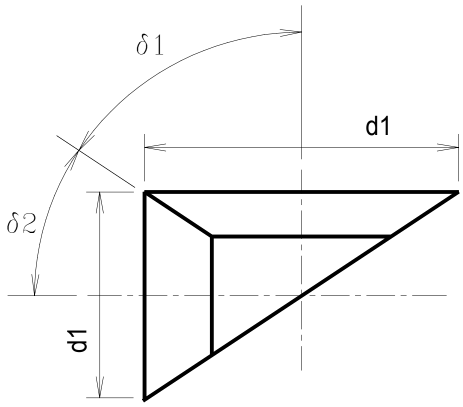
6.) Bestimmen Sie von dem Hochofenschnitt die Neigungswinkel α und β.
(Die Maßzahlen sind Meter-Angaben.)



7.) In eine Bohrlehre sollen 3 Löcher gebohrt werden.
Bestimmen Sie die Lochabstände a und b ($\alpha = 50°$)



8.) Zwei Kegelräder, deren Achsen senkrecht aufeinander stehen, haben die Durchmesser
d1 = 160 mm und d2 = 88 mm.
Bestimmen Sie die Teilkreiswinkel δ1 und δ2!



Lösungen zur Trigonometrie

1.1 $\beta = 62°$, a = 19,17 cm, b = 16,93 cm
1.2 $\alpha = 38°$, b = 4,73 cm, c = 3,69 cm
2.) $\alpha = 9{,}73°$
3.) l1 = 1073 mm, l2 = 1400 mm
4.) h = 1,73 m, a = 3,04 m
5.) 15,17 m
6.) $\alpha = 84{,}11°$, $\beta = 110{,}56°$
7.) a = 155,57 mm, b = 119,17 mm
8.) $\delta 1 = 61{,}18°$, $\delta 2 = 28{,}8°$